Математические формулы и методы их применения

08.10.05 г.

Андрей Ивашов

Тождественные преобразования

Свойства степеней

- $a^0 = 1, \quad a \neq 0$;
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$;
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$.

Свойства арифметических корней

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$;
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$;
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$;
- $\sqrt[n \cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$;
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;
- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;
- $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Свойства дробей

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot m}{b \cdot m}$ *(основное свойство дробей);*
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$ *(основное свойство дробей);*

Свойства модулей

- $|a| = \begin{cases} a, & при\ a \geq 0; \\ -a, & при\ a < 0. \end{cases}$ *(определение модуля);*
- $|a| = |-a|$ *;*
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ *;*
- $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|, \quad b \neq 0$ *;*
- $|a|^n = |a^n|$ *;*
- $|a|^{2n} = a^{2n}$ *;*
- $|a| + |b| \geq |a + b|$.

Основные законы

- $P_n = n!$ (перестановки без повторений);
- $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$ (перестановки с повторениями);
- $C_n^m = \binom{n}{m}$ (сочетания без повторений);
- $\bar{C}_n^{m} = \binom{n+m-1}{m}$ (сочетания с повторениями);
- $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ (размещения без повторений);
- $\bar{A}_n^{m} = n^m$ (размещения с повторениями).

Греческий алфавит

Буквы	Названия	Буквы	Названия
Аa	альфа	Nn	ню (ни)
Вb	бета	Ξx	кси
Γg	гамма	Оo	омикрон
Δd	дельта	Πp	пи
Еe	эпсилон	Рr	ро
Zz	дзета	Σs (V)	сигма
Нh	эта	Тt	тау
ΘJ (q)	тэта	ϒu	ипсилон
Ii	иота	Φj	фи
Кk	каппа	Хc	хи
Λl	лямбда (ламбда)	Ψy	пси
Мm	мю (ми)	Ωw	омега

Латинский алфавит

Буквы	Названия	Буквы	Названия
Aa	а	*Nn*	эн
Bb	бе	*Oo*	о
Cc	це	*Pp*	пэ
Dd	де	*Qq*	ку
Ee	е	*Rr*	эр
Ff	эф	*Ss*	эс
Gg	же (ге)	*Tt*	тэ
Hh	аш (ха)	*Uu*	у
Ii	и	*Vv*	ве
Jj	жи (йот)	*Ww*	дубль-ве
Kk	ка	*Xx*	икс
Ll	эль	*Yy*	игрек
Mm	эм	*Zz*	зет

Тригонометрия

Основные понятия

- $a^{\circ} = \frac{a^{\circ}}{180^{\circ}}p \quad \left(1^{\circ} = \frac{1^{\circ}}{180^{\circ}}p \approx 0{,}017453 \text{ радиана }\right);$
- $a = \frac{a}{p}180^{\circ} \quad \left(1 \text{ радиан} = \frac{1}{p}180^{\circ} \approx 57^{\circ}17'44{,}81''\right).$

Таблица значений тригонометрических функций

	0	$\frac{p}{6}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3p}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg} a$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
$\sec a$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	–	-1	–
$\operatorname{cosec} a$	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	–	-1

Формулы приведения

	$\frac{p}{2}-a$	$\frac{p}{2}+a$	$p-a$	$p+a$	$\frac{3p}{2}-a$	$\frac{3p}{2}+a$
$\sin b$	$\cos a$	$\cos a$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$
$\cos b$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$\sin a$
$\operatorname{tg} b$	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} a$
$\operatorname{ctg} b$	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} a$

Знаки тригонометрических функций

$\sin a$; $\operatorname{cosec} a$.	$\begin{array}{c\|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$	$\cos a$; $\sec a$.	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$	$\operatorname{tg} a$; $\operatorname{ctg} a$.	$\begin{array}{c\|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

Математические функции

Обозначение		Название
log		*Логарифм;*
ln		*Натуральный логарифм (Непера);*
lg		*Десятичный логарифм (Брига);*
$e^{(\ )}$	exp	*Экспонента;*
sin		*Синус;*
cos		*Косинус;*
tg	tan	*Тангенс;*
ctg	cot	*Котангенс;*
sec		*Секанс;*
cosec	csc	*Косеканс;*
arcsin	$\sin^{-1}$ asin	*Арксинус (обратный [инверсный] синус);*
arccos	$\cos^{-1}$ acos	*Арккосинус (обратный [инверсный] косинус);*
arctg	$\tan^{-1}$ atan	*Арктангенс (обратный [инверсный] тангенс);*
arcctg	$\cot^{-1}$ acot	*Арккотангенс (обратный [инверсный] котангенс);*
arcsec	$\sec^{-1}$ asec	*Арксеканс (обратный [инверсный] секанс);*
arccosec	$\csc^{-1}$ acsc	*Арккосеканс (обратный [инверсный] косеканс);*
sh	sinh	*Гиперболический синус;*
ch	cosh	*Гиперболический косинус;*
th	tanh	*Гиперболический тангенс;*
cth	coth	*Гиперболический котангенс;*
arsh	sh^{-1}	*Гиперболический арксинус (аэросинус – обратый гиперболический синус);*
arch	ch^{-1}	*Гиперболический арккосинус (аэрокосинус – обратный [инверсный] гиперболический косинус);*
arth	th^{-1}	*Гиперболический арктангенс (аэротангенс – обратный [инверсный] гиперболический тангенс);*

Формулы сложения аргументов

- $\sin(a\pm b)=\sin a\cdot\cos b\pm\cos a\cdot\sin b$;
- $\cos(a\pm b)=\cos a\cdot\cos b\mp\sin a\cdot\sin b$;
- $\mathrm{tg}(a\pm b)=\dfrac{\mathrm{tg}\,a\pm\mathrm{tg}\,b}{1\mp\mathrm{tg}\,a\cdot\mathrm{tg}\,b}$;
- $\mathrm{ctg}(a\pm b)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,a\cdot\mathrm{ctg}\,b\mp 1}{\mathrm{ctg}\,a\mp\mathrm{ctg}\,b}$;
- $\mathrm{sh}(a\pm b)=\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b\pm\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$;
- $\mathrm{ch}(a\pm b)=\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b\pm\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$.

Формулы кратных аргументов

- $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1+\mathrm{tg}^2 a}$;
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$;
- $\mathrm{tg}\,2a=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}^2 a}=\dfrac{2}{\mathrm{ctg}\,a-\mathrm{tg}\,a}$;
- $\mathrm{ctg}\,2a=\dfrac{\mathrm{ctg}^2 a-1}{2\,\mathrm{ctg}\,a}=\dfrac{\mathrm{ctg}\,a-\mathrm{tg}\,a}{2}$;
- $\mathrm{sh}\,2a=2\cdot\mathrm{sh}\,a\cdot\mathrm{ch}\,a$;
- $\mathrm{ch}\,2a=\mathrm{sh}^2 a+\mathrm{ch}^2 a$;
- $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$;
- $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$;
- $\mathrm{tg}\,3a=\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}^3 a}{1-3\,\mathrm{tg}^2 a}$;
- $\mathrm{ctg}\,3a=\dfrac{\mathrm{ctg}^3 a-3\,\mathrm{ctg}\,a}{3\,\mathrm{ctg}^2 a-1}$.

Сложение тригонометрических функций

- $\sin a\pm\sin b=2\sin\dfrac{a\pm b}{2}\cdot\cos\dfrac{a\mp b}{2}$;
- $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$;
- $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$;

Приложения

Математические константы

- $p \approx 3{,}141592654$ *;*
- $e \approx 2{,}718281828$ *(число Непера);*
- $\lg e \approx 0{,}434294481$ *(модуль перехода);*
- $\ln 10 \approx 2{,}302585093$ *(модуль перехода);*
- $i^2 = -1$ *(где* i *- мнимая единица);*
- $1^{\circ} \approx 0{,}017453$ *радиана (градус);*
- 1 *радиан* $\approx 57^{\circ}17'44{,}81''$ *(радиан).*

Формулы половинного угла

- $\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ *;*
- $\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ *;*
- $\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ *;*
- $\mathrm{ctg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

- $\sin a = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$ *;*
- $\cos a = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$ *;*
- $\mathrm{tg}\, a = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$ *;*
- $\mathrm{ctg}\, a = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}$.

Обратные тригонометрические функции

- $\arcsin a = -\arcsin(-a) = \frac{p}{2} - \arccos a = \mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ *;*
- $\arccos a = p - \arccos(-a) = \frac{p}{2} - \arcsin a = \mathrm{arcctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ *;*
- $\mathrm{arctg}\, a = -\mathrm{arctg}(-a) = \frac{p}{2} - \mathrm{arcctg}\, a = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ *;*
- $\mathrm{arcctg}\, a = p - \mathrm{arcctg}(-a) = \frac{p}{2} - \mathrm{arcctg}\, a = \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Решение неравенств

Двойные неравенства

- $g(x) < f(x) < u(x) \quad \Rightarrow \begin{cases} g(x) < f(x) \\ f(x) < u(x) \end{cases}.$

Степенные неравенства

- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right., \quad n \in N$ *;*
- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}, \quad n \in N$.

Логарифмические неравенства

- $\begin{cases} \log_a u(x) > \log_a v(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > v(x) \\ a > 1 \\ v(x) > 0 \end{cases}$ *;*
- $\begin{cases} \log_a u(x) > \log_a v(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) < v(x) \\ 0 < a < 1 \\ u(x) > 0 \end{cases}$.

Тригонометрические неравенства

- $\sin x > a;\ x \in (\arcsin a + 2p\,n;\ p - \arcsin a + 2p\,n),\ n \in Z$ *(* $|a| < 1$ *);*
- $\sin x < a;\ x \in (-p - \arcsin a + 2p\,n;\ \arcsin a + 2p\,n),\ n \in Z$ *(* $|a| < 1$ *);*
- $\cos x > a;\ x \in (-\arccos a + 2p\,n;\ \arccos a + 2p\,n),\ n \in Z$ *(* $|a| < 1$ *);*
- $\cos x < a;\ x \in (\arccos a + 2p\,n;\ 2p - \arccos a + 2p\,n),\ n \in Z$ *(* $|a| < 1$ *);*
- $\mathrm{tg}\, x > a; \quad x \in \left(\mathrm{arctg}\, a + p\,n;\ {}^{p}\!/_{2} + p\,n\right),\ n \in Z$ *;*
- $\mathrm{tg}\, x < a; \quad x \in \left(-{}^{p}\!/_{2} + p\,n;\ \mathrm{arctg}\, a + p\,n\right),\ n \in Z$ *;*
- $\mathrm{ctg}\, x > a; \quad x \in (p\,n;\ \mathrm{arcctg}\, a + p\,n),\ n \in Z$ *;*
- $\mathrm{ctg}\, x < a; \quad x \in (\mathrm{arcctg}\, a + p\,n;\ p + p\,n),\ n \in Z$.

Логарифмы

Определение логарифма

- $\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0$.

Основные логарифмические тождества

- $a^{\log_a b} = b, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0$ *;*
- $\log_a a^b = b, \quad a \ne 1;\ a > 0$.

Свойства логарифмов

- $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ bc > 0$ *;*
- $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ bc > 0$ *;*
- $\log_a b^c = \begin{cases} c \log_a b, & c = (2n-1); \\ c \log_a |b|, & c = 2n; \end{cases} \ n \in Z;\ a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0$ *;*
- $\log_{a^c} b = \begin{cases} \dfrac{1}{c} \log_a b, & c = (2n-1); \\ \dfrac{1}{c} \log_{|a|} b, & c = 2n; \end{cases} \ n \in Z;\ a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0;\ c \ne 0$ *;*
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \ a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0;\ c \ne 1;\ c > 0$ *(формула перехода к другому основанию);*
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ b \ne 1;\ b > 0$ *;*
- $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ b > 0;\ c > 0$ *;*
- $\log_a b \cdot \log_b a = 1, \quad a \ne 1;\ a > 0;\ b \ne 1;\ b > 0$ *;*
- $\log_{10} b = \lg b, \quad b > 0$ *(десятичный логарифм - Брига);*
- $\log_e b = \ln b, \quad b > 0$ *(натуральный логарифм - Непера).*

- $\cos x = 0; \quad x = \frac{p}{2} + p\,n, n \in Z$;
- $\cos x = 1; \quad x = 2p\,n, n \in Z$;
- $\cos x = -1; \quad x = p + 2p\,n, n \in Z$;
- $\mathrm{tg}\, x = 0; \quad x = p\,n, n \in Z$;
- $\mathrm{ctg}\, x = 0; \quad x = \frac{p}{2} + p\,n, n \in Z$.

Логарифмические уравнения

- $\begin{cases} \log_a u(x) = \log_a v(x) \\ a \neq 1; a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$.

Системы линейных алгебраических уравнений

- $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B, \quad \det(A) \neq 0$ *(матричный метод);*
- $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \mathbf{K}\, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \Delta = \det(A) \neq 0$ *(метод Крамера).*

Дифференциальные уравнения

- $X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0$ *- дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, где*

  $\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = C$ *- общий интеграл;*
- $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *- линейное однородное дифференциальное уравнение, где*

  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *- общее решение (* y_1 *и* y_2 *- линейно-независимые частные решения);*
- $y'' + py' + qy = f(x)$ *- линейное неоднородное дифференциальное уравнения, где*

  $y = \overline{y} + z$ *- общее решение*

$\overline{y}$ *- общее решение однородного уравнения:*

$$k^2 + pk + q = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (k_1 \neq k_2) \in R \Rightarrow \quad \overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \\ (k_1 = k_2) \in R \Rightarrow \quad \overline{y} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}; \\ \begin{cases} k_1 = a + ib \\ k_1 = a - ib \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{y} = e^{ax}\left(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)\right). \end{array} \right.$$

- $k_1 = -\frac{1}{k_2}, \; A_1 A_2 = B_1 B_2$ *(условия ортогональности прямых);*
- $\mathrm{tg}\, a = \pm \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$ *(угол между прямыми);*
- $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *(условие расположения трёх точек* $A(x_1; y_1)$, $A(x_2; y_2)$ *и* $A(x_3; y_3)$ *на одной прямой).*

Прямые второго порядка

- $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ *(общее уравнение).*

Окружность

- $R^2 = x^2 + y^2$ *(характеристическое уравнение);*
- $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ *(со смещённым центром);*
- $\begin{cases} x = r \cdot \cos t; \\ y = r \cdot \sin t. \end{cases}$ *(параметрическое уравнение окружности).*

Эллипс

- $F_1 M + MF_2 = 2a$ *(определение эллипса);*
- $a^2 = b^2 + c^2$ *(характеристическое уравнение эллипса);*
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(каноническое уравнение эллипса);*
- $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ *(уравнение эллипса со смещённым центром).*
- $\begin{cases} x = a \cdot \cos t; \\ y = b \cdot \sin t. \end{cases}$ *(параметрическое уравнение эллипса);*
- $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ *(эксцентриситет эллипса–мера сжатия);*
- $p = \frac{b^2}{2}$ *(фокальный параметр эллипса).*

Гипербола

- $F_1 M - MF_2 = 2a$ *(определение гиперболы);*
- $c^2 = a^2 + b^2$ *(характеристическое уравнение гиперболы);*

Решение уравнений

Квадратные уравнения

- $y = ax^2 + bx + c$;
- $\Delta = b^2 - 4ac, \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{два различных действительных корня;} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{два одинаковых действительных корня;} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{два сопряжённых комплексных корня.} \end{cases}$

  (дискриминант квадратного трёхчлена);
- $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ (выделение полного квадрата - канонический вид уравнения);
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ (разложение на множители);
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (общее уравнение нахождения корней);
- $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$, при $\begin{cases} p = b/a; \\ q = c/a \end{cases}$ (частный случай теоремы Виета для нахождения вещественных корней квадратного трёхчлена).

Кубические уравнения

- $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
- $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r \end{cases}$, при $\begin{cases} p = b/a; \\ q = c/a; \\ r = d/a. \end{cases}$ (частный случай теоремы Виета для нахождения вещественных корней кубического уравнения);
- $y = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$,

  $$y = z^3 + 3pz + 2q, \quad \begin{cases} z = x + \frac{b}{a}; \\ p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}; \\ q = \frac{b^3}{a^3} - \frac{3bc}{2a^2} + \frac{d}{a}; \end{cases}$$

  $$y = \left(u^3\right)^2 + 2qu^3 - p^3, \quad \text{при } z = u - \frac{p}{u} \quad \Rightarrow \quad u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3} ,$$

  $$z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$ (Формула Кардано).

Аналитическая геометрия (R3)

Плоскость

- $Ax + By + Cz + D = 0$ (каноническое уравнение плоскости);
- $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (общее уравнение);
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (уравнение плоскости в отрезках на осях);
- $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (уравнение плоскости, по трём точкам).

Прямая

- $\frac{(x - x_0)}{m} = \frac{(y - y_0)}{n} = \frac{(z - z_0)}{p}$ (каноническое уравнение прямой);
- $\begin{cases} x = m \cdot t + x_0 \\ y = n \cdot t + y_0 \\ z = p \cdot t + z_0 \end{cases}$ (параметрическое уравнение прямой);
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ (каноническое уравнение прямой, по двум точкам);
- $\begin{cases} x = (x_2 - x_1) \cdot t + x_1 \\ y = (y_2 - y_1) \cdot t + y_1 \\ z = (z_2 - z_1) \cdot t + z_1 \end{cases}$ (параметрическое уравнение прямой, по двум точкам);
- $\begin{cases} x_A = \frac{l\,x_2 + x_1}{1 + l} \\ y_A = \frac{l\,y_2 + y_1}{1 + l} \\ z_A = \frac{l\,z_2 + z_1}{1 + l} \end{cases}$ (деление отрезка в данном отношении).

Расстояния

- $d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$ (между точками);
- $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (от точки до плоскости).

Теория вероятности

Основные правила

- $P(A)=\frac{m}{n}$ (классический смысл вероятности);
- $P(\overline{A})=1-P(A)$ (вероятность противоположного события);
- $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (теорема сложения событий);
- $P(AB)=\begin{cases} P(A)P(B|A)-\text{зависимые события;} \\ P(A)P(B)-\text{независимые события;} \end{cases}$ (теорема умножения вероятностей);
- $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)$ (полная вероятность);
- $P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(A|H_j)}$ (формула Бейеса);
- $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad \begin{cases} P(A)=p; \\ P(\overline{A})=q=1-p. \end{cases}$ (биноминальный закон распределения - Бернулли);
- $P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2p npq}}e^{-\frac{t^2}{2}},\quad \begin{cases} 0\le p\le 1; \\ q=1-p; \\ t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \end{cases}$ (локальная формула Лапласа);
- $P(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi(t_{m_2})-\Phi(t_{m_1}),\quad \begin{cases} \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt; \\ t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \end{cases}$ (интегральная формула Лапласа);
- $P_n(m)\approx\frac{m^m}{m!}e^{-m},\quad \begin{cases} m=np; \\ p\to 0. \end{cases}$ (формула Пуассона);
- $j(x)=\frac{1}{s\cdot\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2}},\quad \begin{cases} x_0=M(x); \\ s=\sqrt{D(x)}. \end{cases}$ (плотность вероятности для нормального закона распределения);

- $\cos(a)=\frac{(\vec{S_1}\cdot\vec{S_2})}{|\vec{S_1}|\cdot|\vec{S_2}|}$ (угол между прямыми);
- $\vec{N}\cdot\vec{S}=0$ (параллельность прямой и плоскости);
- $A_1B_2-A_2B_1=B_1C_2-B_2C_1=A_1C_2-A_2C_1=0$ (параллельность плоскостей);
- $m_1n_2-m_2n_1=n_1p_2-n_2p_1=m_1p_2-m_2p_1=0$ (параллельность прямых);
- $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ (ортогональность прямой и плоскости);
- $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (ортогональность плоскостей);
- $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ (ортогональность прямых).

Приложения

- $V_{пар.}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$ (объём параллелограмма);
- $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$ (объём пирамиды).

Ряды

Определения

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ *(основное определение);*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + i \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *(ряд в комплексной области);*
- $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n, \quad S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ *(сумма ряда);*
- $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \\ a_n \neq 0. \end{cases}$ *(радиус сходимости по формуле Даламбера);*
- $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \\ a_n \neq 0. \end{cases}$ *(радиус сходимости по формуле Коши).*

Разложение в степенные ряды

- $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$ *(ряд Маклорена);*
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$ *(ряд Тейлора).*

Признаки сходимости рядов

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \begin{bmatrix} l < 1 & - \text{сходится}; \\ l > 1 & - \text{расходится}; \\ l = 1 & - \text{не применим}. \end{bmatrix}$ *(признак Даламбера);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = \begin{bmatrix} l < 1 & - \text{сходится}; \\ l > 1 & - \text{расходится}; \\ l = 1 & - \text{не применим}. \end{bmatrix}$ *(признак Коши);*
- *При* $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \ldots \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$ *сходится (признак Лейбница);*
- $\int\limits_a^{\infty} U(x)\,dx = \begin{bmatrix} \in R & - \text{сходится}; \\ \pm\infty & - \text{расходится}. \end{bmatrix}$ *для* $\sum\limits_{a}^{\infty} U_n$ *(интегральный признак Коши).*

Таблица разложенных в степенные ряды функций

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1$ *;*

- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{im} A_{im}$

(разложение определителя по i *-той строке).*

Операции над определителями

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ *;*
- $l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ l a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l a_{11} & l a_{12} & \ldots & l a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}.$

Обратная матрица

- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T, \quad \det(A) \neq 0$ *(теорема Лапласа);*
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ *(метод Гаусса).*

Комплексные числа

Определения

- $i^2 = -1$ *(где i - мнимая единица);*
- $z = a + bi, \begin{cases} a = \operatorname{Re} z - \textit{действительная часть;} \\ b = \operatorname{Im} z - \textit{мнимая часть.} \end{cases}$ *(алгебраическая форма комплексного числа);*
- $j = \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a},\ 0 \le \arg z \le 2p,\ z \ne 0$ *(аргумент комплексного числа);*
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *(модуль комплексного числа).*
- $z = |z|(\cos j + i \cdot \sin j), \begin{cases} \cos j = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin j = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$ *(тригонометрическая форма комплексного числа);*
- $e^{ij} = \cos j + i \sin j = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + i\dfrac{j}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(ij)^n}{n!}$ *(формула Эйлера);*
- $z = |z| \cdot e^{ij}$ *(показательная форма комплексного числа);*

Основные свойства

$$\begin{pmatrix} z_1 = a + bi = |z_1|(\cos j_1 + i \cdot \sin j_1); \\ z_2 = c + di = |z_2|(\cos j_2 + i \cdot \sin j_2) \end{pmatrix}$$

- $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$;
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad z_2 \ne 0$;
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(j_1 + j_2) + i \sin(j_1 + j_2))$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(j_1 - j_2) + i \sin(j_1 - j_2)), \quad z_2 \ne 0$;
- $z_1^n = |z_1|^n \cdot (\cos(nj_1) + i \sin(nj_1)), \quad z_1 \ne 0$ *(формула Муавра);*
- $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\left(\cos\left(\dfrac{j_1 + 2pm}{n}\right) + i \sin\left(\dfrac{j_1 + 2pm}{n}\right)\right), m = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$;

- $(\operatorname{arcsec} u)' = \dfrac{1}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}} \cdot u'$;
- $(\operatorname{arccosec} u)' = -\dfrac{1}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}} \cdot u'$;
- $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
- $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
- $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
- $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Правила дифференцирования

- $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
- $(u \pm v \pm \ldots \pm z)' = u' \pm v' \pm \ldots \pm z'$;
- $(u \cdot v \cdot \ldots \cdot z)' = u' \cdot v \cdot \ldots \cdot z + u \cdot v' \cdot \ldots \cdot z + \ldots + u \cdot v \cdot \ldots \cdot z'$;
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;
- $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$;
- $u'(x) = u'(v) \cdot v'(x), \quad v = j(x)$;
- $u'(v) = \dfrac{1}{v'(u)}$;
- $u^{(n)}(x) = u^{(n-1)}(x)'$ *(производные высших порядков);*
- $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots$

  $\ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}$ *(формула Лейбница).*

Логарифмическая производная

- $u'(x) = u(x) \cdot (\ln|u(x)|)'$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

- $$\begin{cases}\begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\\ \operatorname{tg} x=\dfrac{2t}{1-t^2}; \qquad t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.\\ \operatorname{ctg} x=\dfrac{1-t^2}{2t};\end{cases}\\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt.\end{cases}$$

Метод неопределённых коэффициентов

- $\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathbf{K}+a_{m-1}x+a_m}{(x-x_1)(x-x_2)\mathbf{K}(x-x_n)}\equiv\dfrac{A_1}{x-x_1}+\dfrac{A_2}{x-x_2}+\mathbf{K}+\dfrac{A_n}{x-x_n}$ *(в случае простых вещественных корней знаменателя);*
- $$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathbf{K}+a_{m-1}x+a_m}{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\mathbf{K}(x-x_s)^{n_s}}\equiv$$ $$\frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\mathbf{K}+\frac{A_{1n}}{(x-x_1)^{n_1}}+\mathbf{K}\frac{A_{s1}}{x-x_s}+\frac{A_{s2}}{(x-x_s)^2}+\mathbf{K}+\frac{A_{sn}}{(x-x_s)^{n_s}}$$ *(в случае кратных вещественных корней знаменателя);*
- $$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathbf{K}+a_{m-1}x+a_m}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\mathbf{K}(x^2+p_sx+q_s)}\equiv$$ $$\equiv\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+p_2x+q_2}+\mathbf{K}+\frac{A_sx+B_s}{x^2+p_sx+q_s}$$ *(в случае простых комплексных корней знаменателя);*
- $$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\mathbf{K}+a_{m-1}x+a_m}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}\mathbf{K}(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}\equiv$$ $$\equiv\frac{A_{11}x+B_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\mathbf{K}+\frac{A_{1n}x+B_{1n}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}+\mathbf{K}+\frac{A_{s1}x+B_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\mathbf{K}+\frac{A_{sn}x+B_{sn}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}$$ *(в случае кратных комплексных корней знаменателя).*

Приложения

- $S=\int_a^b(v(x)-u(x))\,dx$ *(площадь криволинейной трапеции);*

Пределы

Свойства пределов

- $\lim\limits_{x\to x_0}(u\pm v)=\lim\limits_{x\to x_0}u\pm\lim\limits_{x\to x_0}v$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(u\cdot v)=\lim\limits_{x\to x_0}u\cdot\lim\limits_{x\to x_0}v$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}u}{\lim\limits_{x\to x_0}v},\quad \lim\limits_{x\to x_0}v\neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot u)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}u$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(u)^C=\left(\lim\limits_{x\to x_0}u\right)^C$.

Замечательные (классические) пределы

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{a\cdot x}=e^a\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=e^a$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2x)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2x-1)}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2x}=\dfrac{p}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x!}{x^x\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{2p}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x!}=0$.

- $\int\sqrt{x^2 \pm r^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm r^2} \pm \frac{r^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm r^2}\right| + C$;
- $\int\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C, \quad r \neq 0$;
- $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$;
- $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;
- $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln|\operatorname{ch} x| + C$;
- $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C$;
- $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + C$;
- $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + C$.

Основные правила

- $\int\left(u(x) \pm v(x)\right)dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$;
- $\int r \cdot u(x)\,dx = r \cdot \int u(x)\,dx$;
- $\left(\int u(x)\,dx\right)' = u(x)$;
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C$;
- $\int u(x)dx = \int u(j(t))\,j'(t)dt$ *(замена переменной);*
- $\int(u \cdot v')\,dx = u \cdot v - \int(u' \cdot v)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int udv = u \cdot v - \int vdu$ *(интегрирование по частям);*
- $\int_a^b(u \cdot v')dx = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b(u' \cdot v)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ *(интегрирование по частям определённого интеграла);*
- $\int_a^a u(x)\,dx = 0$;
- $\int_a^b u(x)\,dx = -\int_b^a u(x)\,dx$;
- $\int_a^b u(x)\,dx = U(x)\Big|_a^b = U(b) - U(a)$ *(Ньютона-Лейбница);*
- $\int_a^b u(x)\,dx = \int_a^c u(x)dx + \int_c^b u(x)\,dx, \quad a < c < b$;

Исследование графика функции

1. *Область определения функции (ООФ). Симметрия графика функции (чётность, нечетность).*

$a/b \ \exists \ b \neq 0$	$\operatorname{ctg} a \ \exists \ a \neq pn$
$\sqrt[2n]{a} \ \exists \ a \geq 0, \quad n \in Z$	$\arcsin a \ \exists \ -1 \leq a \leq 1$
$\log_a b \ \exists \ a > 0, a \neq 1, b > 0$	$\arccos a \ \exists \ -1 \leq a \leq 1$
$\operatorname{tg} a \ \exists \ a \neq p/2 + pn, n \in Z$	

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = f(-x) \quad - \textit{чётная функция}; \\ f(-x) = -f(x) \ - \textit{нечётная функция}. \end{array}\right.$$

2. *Точки пересечения графика функции с осями координат. Знаки функции. Периодичность.*

$f(x) \equiv f(x \pm T)$ *– периодическая.*

3. *Найти вертикальные асимптоты.*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, a *- точка разрыва II-го рода.*

4. *Найти наклонные (горизонтальные) асимптоты.*

$$y = kx + b, \quad k = \lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - kx\right).$$

5. *Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.*

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ *возрастает*; $\quad f'(x) < 0 \Rightarrow$ *убывает.*

$$\begin{cases} f'(x) = 0; \\ f'(x - \Delta x) < 0; \Rightarrow \min f(x); \\ f'(x + \Delta x) > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = 0; \\ f'(x - \Delta x) > 0; \Rightarrow \max f(x). \\ f'(x + \Delta x) < 0. \end{cases}$$

6. *Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.*

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ *вогнутость*; $\quad f''(x) < 0 \Rightarrow$ *выпуклость*;

$$\begin{cases} f''(x) = 0; \\ f''(x - \Delta x) < 0; \\ f''(x + \Delta x) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f''(x) = 0; \\ f''(x - \Delta x) > 0; \Rightarrow \textit{точки перегиба}. \\ f''(x + \Delta x) < 0. \end{cases}$$

7. *Используя полученные данные построить график функции.*

- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ (приведение к общему виду);
- $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$ (сложение дробей);
- $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ (умножение дробей);
- $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$ (деление дробей);
- $\dfrac{c}{(n+a)(n+b)}=\left(\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{n+b}\right)\cdot\dfrac{c}{b-a},\ a\neq b$ (разложение на элементарные дроби).

Пропорции

- $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow ad=cb,\quad b\neq 0;\ d\neq 0$.

Формулы сокращённого умножения

- $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$;
- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;
- $a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\mp ab+b^2\right)$;
- $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
- $a^n\pm b^n=(a\pm b)\cdot\left(a^{n-1}\mp a^{n-2}b+\ldots\mp ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$;
- $(a\pm b)^n=C_n^0a^n\pm C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2\pm\ldots$

  $\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k\pm\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}\pm C_n^nb^n$ (бином Ньютона).

Средние значения конечного массива элементов

- $S_a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ (среднее арифметическое значение);
- $S_a=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ (среднее геометрическое значение);
- $S_a=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ (среднее гармоническое значение).

Содержание

Комбинаторика

Факториал

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{m=1}^{n} m, \quad n \in N$ *(определение);*
- $0! = 1$ *;*
- $(n+1)! = n!(n+1)$ *;*
- $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad$ *при* $\quad n \to \infty$ *(формула Стирлинга);*

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{q_n}{12n}}, \quad$ *при* $\quad 0 < q_n < 1$ *;*

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(n^{-4}\right)\right), \quad n > 3$.

Двойной факториал

- $0!! = 1$ *;*
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = \prod_{m=1}^{n} 2m, \quad n \in N$ *;*
- $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) = \prod_{m=1}^{n} (2m+1), \quad n \in N$.

Символ Ньютона

- $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \in N, 0 \le m \le n$ *(определение);*
- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ *;*
- $\binom{n}{m} + \binom{n}{n-m} = \binom{n+1}{m}, \quad 1 \le m \le n$ *;*
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *;*
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ *;*
- $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

- $a_n = a_1 + d(n-1) = a_{n+1} - d = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
- $n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1$;
- $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;
- $a_m + a_n = a_p + a_q, \quad m + n = p + q$.

Геометрическая прогрессия

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{b_{n+1}}{q}$;
- $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$;
- $S_n = n \cdot b_1, \quad q = 1$;
- $b_n^2 = b_{m-1} \cdot b_{m+1}$;
- $b_m \cdot b_n = b_p \cdot b_q, \quad m + n = p + q$;
- $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n, \quad |q| < 1$ *(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).*

Для заметок

Определения

- $\mathrm{tg}\,a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sec a}{\mathrm{cosec}\,a} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,a}$;
- $\mathrm{ctg}\,a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\mathrm{cosec}\,a}{\sec a} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,a}$;
- $\sec a = \frac{1}{\cos a}$;
- $\mathrm{cosec}\,a = \frac{1}{\sin a}$;
- $\mathrm{sh}\,a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$;
- $\mathrm{ch}\,a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$;
- $\mathrm{th}\,a = \frac{\mathrm{sh}\,a}{\mathrm{ch}\,a} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$;
- $\mathrm{cth}\,a = \frac{\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{sh}\,a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$.

Связь функций одного угла

- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$;
- $\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{sh}^2 a = 1$;
- $\mathrm{tg}\,a \cdot \mathrm{ctg}\,a = 1$;
- $\mathrm{th}\,a \cdot \mathrm{cth}\,a = 1$;
- $\sin a \cdot \mathrm{cosec}\,a = 1$;
- $\cos a \cdot \sec a = 1$;
- $1 + \mathrm{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a$;
- $1 + \mathrm{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} = \mathrm{cosec}^2 a$;
- $\mathrm{th}^2 a + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 a} = 1$;
- $\mathrm{cth}^2 a - \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a} = 1$;

arcth	cth^{-1}	*Гиперболический арккотангенс (аэро-котангенс - обратный [инверсный] гиперболический котангенс);*
amph gd		*Гиперболическая амплитуда (гудер-маниан).*
Si		*Интегральный синус;*
Ci		*Интегральный косинус;*
Ei		*Интегральная экспонента;*
li		*Интегральный логарифм;*
det		*Детерминант (определитель);*
lim		*Предел (лимит);*
arg		*Аргумент;*
grad		*Градиент.*

- $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$;
- $\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \cdot \sin b}$;
- $\operatorname{sh} a \pm \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a \pm b}{2} \operatorname{ch} \frac{a\, \mathbf{m}\, b}{2}$;
- $\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{ch} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2}$;
- $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{x} \operatorname{sh} \frac{a-b}{2}$.

Произведения тригонометрических функций

- $\sin a \cdot \sin b = 1/2 \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$;
- $\cos a \cdot \cos b = 1/2 \cdot (\cos(a-b) + \cos(a+b))$;
- $\sin a \cdot \cos b = 1/2 \cdot (\sin(a-b) + \sin(a+b))$;
- $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b} = -\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b}$;
- $\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b = \frac{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = -\frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$;
- $\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{ctg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} b} = -\frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} b}$.

Формулы понижения степени

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$;
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$;
- $\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch}^2 2a + 1}{2}$;
- $\operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch}^2 2a - 1}{2}$;
- $\cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$;
- $\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$.

Математические обозначения

$=$	*равно;*
$\neq$	*не равно;*
$\equiv$	*тождественно равно;*
:	*эквивалентно (подобно);*
$\approx$	*приближенно равно;*
$+, -$	*сложение (плюс, минус);*
$\cdot, \div$	*произведение (умножение, деление);*
$>$	*строго больше;*
$<$	*строго меньше;*
$\geq$	*нестрого больше;*
$\leq$	*нестрого меньше;*
?	*много больше;*
=	*много меньше;*
$\vert\ \vert$	*модуль (абсолютная величина);*
const	*константа (постоянная величина);*
∞	*бесконечность;*
$\forall$	*для всех;*
$\in$	*принадлежит;*
$\notin$	*не принадлежит;*
$\exists$	*существует;*
Ω	*достоверно;*
$\varnothing$	*пустое множество;*
$\Rightarrow$	*необходимо;*
$\Leftarrow$	*достаточно;*
$\Leftrightarrow$	*необходимо и достаточно;*
$\sum$	*сумма (строчная сигма);*
$\prod$	*произведение (строчная пи).*

Соотношение функций углов треугольника

- $\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$ *;*
- $\sin a + \sin b - \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$ *;*
- $\cos a + \cos b + \cos c = 4\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2} + 1$ *;*
- $\cos a + \cos b - \cos c = 4\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2} - 1$ *;*
- $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c + 2$ *;*
- $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = 2\sin a\cdot\sin b\cdot\cos c$ *;*
- $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{tg} c$ *;*
- $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{ctg} c$ *;*
- $\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{ctg} c = 1$.

Формулы косоугольных треугольников

- $\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c} = 2r$ *(теорема синусов);*
- $\cos a = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}$ *(теорема косинусов);*
- $\frac{A+B}{A-B} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ *(теорема тангенсов).*

Преобразование выражений

- $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+j)$, $\begin{cases}\sin j = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ j = \operatorname{arctg}(b/a), \quad a>0; \\ j = p + \operatorname{arctg}(b/a), \; a<0.\end{cases}$

Обратные тригонометрические неравенства

- $\arcsin x > a; \quad x\in(\sin a; 1]$ *(* $|a| < p/2$ *);*
- $\arcsin x < a; \quad x\in[-1; \sin a)$ *(* $|a| \le p/2$ *);*
- $\arccos x > a; \quad x\in[-1; \cos a)$ *(* $0 < a < p$ *);*
- $\arccos x < a; \quad x\in(\cos a; 1]$ *(* $0 < a \le p$ *);*
- $\operatorname{arctg} x > a; \quad x\in(\operatorname{tg} a; +\infty)$ *(* $|a| < p/2$ *);*
- $\operatorname{arctg} x < a; \quad x\in(-\infty; \operatorname{tg} a)$ *(* $|a| < p/2$ *);*
- $\operatorname{arcctg} x > a; \quad x\in(-\infty; \operatorname{ctg} a)$ *(* $0 < a < p$ *);*
- $\operatorname{arcctg} x < a; \quad x\in(\operatorname{ctg} a; +\infty)$ *(* $0 < a < p$ *).*

Аналитическая геометрия (R2)

Прямая

- $Ax + By + C = 0$ *(общее уравнение прямой);*
- $y = kx + b \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ *(уравнение прямой с угловым коэффициентом);*
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ *(уравнение прямой, по двум точкам);*
- $\begin{cases} x = a \cdot t + x_1 \\ y = b \cdot t + y_1 \end{cases}$ *(параметрическое уравнение прямой);*
- $\begin{cases} x = t \cdot (x_2 - x_1) + x_1 \\ y = t \cdot (y_2 - y_1) + y_1 \end{cases}$ *(параметрическое уравнение прямой, по двум точкам);*
- $y - y_A = k(x - x_A)$ *(уравнение пучка прямых);*
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ *(уравнение прямой, в отрезках на осях);*
- $x \cdot \cos a + y \sin a - p = 0$ *(нормальное уравнение прямой);*
- $\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ *(биссектриса между двумя прямыми);*
- $\begin{cases} x_A = \dfrac{l x_2 + x_1}{1 + l} \\ y_A = \dfrac{l y_2 + y_1}{1 + l} \end{cases}$ *(деление отрезка в данном отношении).*

Расстояния

- $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ *(между двумя точками);*
- $d = \pm \frac{Ax_A + By_A + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ *(от точки до прямой);*
- $d = x_0 \cos a + y_0 \sin a - p$ *(от точки до прямой);*
- $d = \pm \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ *(между параллельными прямыми).*

Отношения между объектами

- $k_1 = k_2$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ *(условия параллельности прямых);*

z *- частное решение неоднородного уравнения:*

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} ae^{mx} \Rightarrow k^2 + pk + q \neq 0 \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \Rightarrow z = Ae^{mx}; \\ \Delta = 0 \Rightarrow z = Ax^2 e^{mx}; \\ \Delta > 0 \Rightarrow z = Axe^{mx}; \end{array} \right. \\ M \cos wx + N \sin wx \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 + (q - w^2)^2 \neq 0 \Rightarrow z = A\cos wx + B\sin wx; \\ p = 0, q = w^2 \Rightarrow z = x(A\cos wx + B\sin wx); \end{array} \right. \\ ax^2 + bx + c \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q \neq 0 \Rightarrow z = Ax^2 + Bx + C; \\ q = 0, p \neq 0 \Rightarrow z = x(Ax^2 + Bx + C). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- $\begin{cases} y' + g(x)y = f(x)y^a \\ y = z^{\frac{1}{1-a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' + (1-a)g(x)z = (1-a)f(x) \\ z = y^{1-a} \end{cases}, \begin{cases} a \neq 0; \\ a \neq 1. \end{cases}$

  (уравнение Бернулли).

- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *(каноническое уравнение гиперболы);*
- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *(уравнение гиперболы со смещённым центром);*
- $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ *(уравнение асимптот гиперболы);*
- $e=\dfrac{c}{a}>1$ *(эксцентриситет гиперболы – мера сжатия);*
- $p=\dfrac{b^2}{a}$ *(фокальный параметр гиперболы).*

Парабола

- $y^2=2px$ *(каноническое уравнение параболы);*
- $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ *(уравнение параболы со смещённым центром)*
- $x=-\dfrac{p}{2}$ *(директриса параболы - направляющая);*
- $p=\dfrac{b^2}{a}$ *(фокальный параметр параболы).*

Системы координат

- $\begin{cases} x=x_0+a; \\ y=y_0+b. \end{cases}$ *(перенесение начала координат);*
- $\begin{cases} x=x_0\cos a-y_0\sin a; \\ y=x_0\sin a+y_0\cos a. \end{cases}$ *(поворот координатных осей);*
- $\begin{cases} x=r\cos a; \\ y=r\sin a; \\ r=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$ *(полярные координаты).*

Приложения

- $S_V=\pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$ *(площадь треугольника по трём вершинам);*
- $S_Y=\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|$ *(площадь параллелограмма по двум векторам).*

Степенные уравнения высших порядков

- $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{K}+a_{n-1}x+a_n$;
- $y=(x-x_1)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\mathbf{K}+b_{n-2}x+b_{n-1}\right)$;
- $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{K}+a_{n-1}x+a_n}{x-x_1}=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\mathbf{K}+b_{n-2}x+b_{n-1}+\dfrac{r}{x-x_1}$

(теорема Безу, где r - остаток, x_1 - корень $y(x)$);

- $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ++ \\ -- \end{cases} \Rightarrow - \\ \begin{cases} +- \\ -+ \end{cases} \Rightarrow + \end{array}\right.$ *(правило Декарта – чередование знаков коэффициентов степенного уравнения, определяет знаки вещественных корней данного уравнения, не применимо в случае комплексных корней);*
- $\begin{cases} c_1+c_2+c_3+\mathbf{K}+c_{n-1}+c_n=-a_1; \\ c_1c_2+c_1c_3+\mathbf{K}+c_2c_3+\mathbf{K}+c_{n-1}c_n=a_2; \\ c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+\mathbf{K}+c_{n-2}c_{n-1}c_n=-a_2; \\ \mathbf{K} \\ c_1c_2c_3\cdot\mathbf{K}\cdot c_{n-2}c_{n-1}c_n=(-1)^n a_n. \end{cases}$ *(теорема Виета для нахождения вещественных корней степенных функций высших порядков).*

Тригонометрические уравнения

- $\sin x=a;\quad x=(-1)^n\arcsin a+pn,\quad n\in Z;\quad -p/2\le\arcsin a\le p/2$;
- $\cos x=a;\quad x=\pm\arccos a+2pn,\quad n\in Z;\quad 0\le\arccos a\le p$;
- $\operatorname{tg}x=a;\quad x=\operatorname{arctg}a+pn,\quad n\in Z;\quad -p/2<\operatorname{arctg}a<p/2$;
- $\operatorname{ctg}x=a;\quad x=\operatorname{arcctg}a+pn,\quad n\in Z;\quad 0<\operatorname{arcctg}a<p$;
- $\operatorname{sh}x=a;\quad x=\operatorname{Arsh}a$;
- $\operatorname{ch}x=a;\quad x=\operatorname{Arch}a$;
- $\operatorname{th}x=a;\quad x=\operatorname{Arth}a$;
- $\operatorname{cth}x=a;\quad x=\operatorname{Arcth}a$.

Частные случаи тригонометрических уравнений

- $\sin x=0;\quad x=pn,\ n\in Z$;
- $\sin x=1;\quad x=\dfrac{p}{2}+2pn,\ n\in Z$;
- $\sin x=-1;\quad x=-\dfrac{p}{2}+2pn,\ n\in Z$;

Вектор

- $\vec{AB}\{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\}$ *(по двум точкам);*
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(a)$ *(скалярное произведение);*
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_a + y_a + z_a)\cdot(x_b + y_b + z_b) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$ *(скалярное произведение);*
- $\vec{a}\times\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}] = ||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(a)|$ *(векторное произведение);*
- $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$ *(векторное произведение);*
- $\left\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\rangle = \vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$ *(смешанное произведение векторов);*
- $\left\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$ *(смешанное произведение векторов);*
- $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$ *(двойное векторное произведение);*
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)$ *(двойное векторное произведение);*
- $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$ *(длина вектора);*
- $|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2}$ *(модуль вектора).*

Отношения между объектами

- $\sin(a) = \dfrac{(\vec{N}\cdot\vec{S})}{|\vec{N}|\cdot|\vec{S}|}$ *(угол между прямой и плоскостью);*
- $\cos(a) = \dfrac{(\vec{N_1}\cdot\vec{N_2})}{|\vec{N_1}|\cdot|\vec{N_2}|}$ *(угол между плоскостями);*

- $\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} j(t)\,dt,\quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty; \\ j(x) - \text{плотность.} \end{cases}$

  (функция распределения непрерывной величины);
- $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x j(x)\,dx$ *(математическое ожидание);*
- $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 j(x)\,dx$ *(дисперсия).*

Матрицы

Операции над матрицами

- $$A_{mn} \pm B_{mn} = C_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \ldots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \ldots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \ldots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix};$$
- $$A_{mn} \cdot B_{nl} = C_{ml} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nl} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1l}+a_{12}b_{2l}+\ldots+a_{1n}b_{nl} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1l}+a_{22}b_{2l}+\ldots+a_{2n}b_{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1l}+a_{m2}b_{2l}+\ldots+a_{mn}b_{nl} \end{pmatrix};$$
- $$l \cdot A_{mn} = \begin{pmatrix} l \cdot a_{11} & l \cdot a_{12} & \ldots & l \cdot a_{1n} \\ l \cdot a_{21} & l \cdot a_{22} & \ldots & l \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l \cdot a_{m1} & l \cdot a_{m2} & \ldots & l \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства определителей

- $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ *(определитель первого порядка);*
- $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *(определитель второго порядка)*
- $$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$
(определитель третьего порядка);

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1;$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |x| < +\infty;$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad |x| < +\infty;$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |x| < +\infty;$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| < 1;$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad |x| \le 1;$
- $\operatorname{arsh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} \pm \ldots, \quad |x| < 1;$
- $\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots, \quad |x| < 1;$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots, \quad |x| < +\infty;$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad |x| < +\infty;$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$

Приложения

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=a}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=a}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}}{n+1}$ *(приближенное вычисление интегралов).*

Производные функций

Определение производной

- $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$.

Таблица производных

- $\left(u^c\right)'=c\cdot u^{c-1}\cdot u'$;
- $(c)'=0$;
- $\left(c^u\right)'=c^u\cdot\ln c\cdot u'$;
- $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$;
- $\left(\log_c u\right)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln c}\cdot u'$;
- $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$;
- $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;
- $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
- $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'=\sec^2 u\cdot u'$;
- $(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$;
- $(\sec u)'=\sec u\cdot\operatorname{tg} u\cdot u'$;
- $(\operatorname{cosec} u)'=-\operatorname{cosec} u\cdot\operatorname{ctg} u\cdot u'$;
- $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
- $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
- $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
- $(\operatorname{arcctg} u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

Значения функций комплексных аргументов

($z=a+bi=|z|(\cos j+i\cdot\sin j)$)

- $\ln(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$;
- $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;
- $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$;
- $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$;
- $\operatorname{ch} z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$;
- $\operatorname{tg} z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\cdot\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}=\dfrac{\sin z}{\cos z}$;
- $\operatorname{th} z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;
- $\operatorname{ctg} z=\dfrac{i\cdot\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}=\dfrac{\cos z}{\sin z}$;
- $\operatorname{cth} z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}=\dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$;
- $\sec z=\dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}=\dfrac{1}{\cos z}$;
- $\sec z=\dfrac{2}{e^{z}+e^{-z}}=\dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$;
- $\operatorname{cosec} z=\dfrac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}=\dfrac{1}{\sin z}$;
- $\operatorname{cosech} z=\dfrac{2}{e^{z}-e^{-z}}=\dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$;
- $\arcsin z=-i\cdot\ln\left(i\cdot z+\sqrt{1-z^2}\right)=-i\cdot\operatorname{arsh}(i\cdot z)$;
- $\arccos z=-i\cdot\ln\left(z+i\cdot\sqrt{1-z^2}\right)=-i\cdot\operatorname{arch} z$;
- $\operatorname{arctg} z=-\dfrac{i}{2}\cdot\ln\dfrac{1+i\cdot z}{1-i\cdot z}=-i\cdot\operatorname{arth}(i\cdot z)$;
- $\operatorname{arcctg} z=\dfrac{i}{2}\cdot\ln\dfrac{i\cdot z+1}{i\cdot z-1}=i\cdot\operatorname{arcth}(i\cdot z)$;
- $\operatorname{arsh} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)=-i\cdot\arcsin(i\cdot z)$;
- $\operatorname{arch} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=i\cdot\arccos z$;
- $\operatorname{arth} z=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1+z}{1-z}=-i\cdot\operatorname{arctg}(i\cdot z)$;
- $\operatorname{arcth} z=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1+z}{1-z}=i\cdot\operatorname{arcctg}(i\cdot z)$.

Параметрические функции

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}.$

Приложения

- $(y - y_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ *(уравнение касательной);*
- $(y - y_0) = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ *(уравнение нормали);*
- $\left[\begin{array}{l} f'(x) > 0 \Rightarrow \text{функция возрастает;} \\ f'(x) < 0 \Rightarrow \text{функция убывает.} \end{array} \right.$ *(признаки возрастания и убывания функции);*
- $\left[\begin{array}{l} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{вогнутость функции;} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow \text{выпуклость функции.} \end{array} \right.$ *(признаки вогнутости и выпуклости функции);*
- $\begin{cases} f'(x) = 0; \\ f'(x - \Delta x) < 0; \Rightarrow \min f(x); \\ f'(x + \Delta x) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f'(x) = 0; \\ f'(x - \Delta x) > 0; \Rightarrow \max f(x); \\ f'(x + \Delta x) < 0. \end{cases}$
- $\begin{cases} f'(x) = 0; \\ f''(x) > 0. \end{cases} \Rightarrow \min f(x); \quad \begin{cases} f'(x) = 0; \\ f''(x) < 0. \end{cases} \Rightarrow \max f(x)$ *(экстремумы функции);*
- $\begin{cases} f''(x) = 0; \\ f''(x - \Delta x) < 0; \\ f''(x + \Delta x) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f''(x) = 0; \\ f''(x - \Delta x) > 0; \\ f''(x + \Delta x) < 0. \end{cases}$ *(точки перегиба);*
- $k = \dfrac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ *(кривизна функции);*
- $f(x) = f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x, \quad \Delta x = x - a$ *(приближенное вычисление значения функции в данной точке).*

- $S = \dfrac{1}{2}\int_a^b r^2(j)\,dj$ *(площадь криволинейного сектора);*
- $S = 2p\int_a^b u_x\sqrt{1 + (u'_x)^2}\,dx$ *(площадь поверхности вращения);*
- $l = \int_a^b \sqrt{1 + (u'_x)^2}\,dx$ *(длина дуги кривой);*
- $l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$ *(длина дуги кривой, заданной параметрически);*
- $l = \int_a^b \sqrt{r_j^2 + (r'_j)^2}\,dj$ *(длина дуги кривой в полярных координатах);*
- $V = \int_a^b S(x)\,dx, \quad S(x) - \text{поперечное сечение}$ *(объём тела);*
- $\left[\begin{array}{l} V_x = p\int_a^b \left(v^2(x) - u^2(x)\right)dx - \text{вокруг оси } OX; \\ V_y = p\int_a^b \left(v^2(y) - u^2(y)\right)dy - \text{вокруг оси } OY. \end{array} \right. \quad a < b$ *(объём тела вращения);*
- $A = \int_a^b F(x)\,dx$ *(работа переменной силы).*

Эквивалентность бесконечно-малых

- $\sin x \sim x, \quad x \to 0$;
- $\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \to 0$;
- $\ln(1+x) \sim x, \quad x \to 0$;
- $e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0$;
- $\arcsin x \sim x, \quad x \to 0$;
- $\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \to 0$;
- $\dfrac{a^x - 1}{\ln a} \sim x \quad \Rightarrow \quad (a^x - 1) \sim x \cdot \ln a, \quad x \to 0$;
- $\dfrac{(1+x)^m - 1}{m} \sim x \quad \Rightarrow \quad \left((1+x)^m - 1\right) \sim x \cdot m, \quad x \to 0$.

Сравнение бесконечно-малых

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \ a(x) \text{ и } b(x) \text{ эквивалентны;} \\ const \neq 0 & \Rightarrow \ a(x) \text{ и } b(x) \text{ одного порядка малости;} \\ 0 & \Rightarrow \ a(x) \text{ более высокого порядка, чем } b(x); \\ \infty & \Rightarrow \ b(x) \text{ более высокого порядка, чем } a(x). \end{cases}$$

Способы раскрытия неопределенностей

- $\lim\limits_{x \to x_0} (u - v) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(1/v) - (1/u)}{1/(u \cdot v)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (u \cdot v) = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u}{1/v} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v}{1/u} = \left[\begin{matrix} [0/0] \\ [\infty/\infty] \end{matrix}\right.$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} u^v = \left[\begin{matrix} [0^0] \\ [\infty^0] \\ [1^\infty] \end{matrix}\right. = \lim e^{v \cdot \ln u} = \exp \lim\limits_{x \to x_0} (v \cdot \ln u) = [0 \cdot \infty]$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} m > n \Rightarrow \infty; \\ m = n \Rightarrow a_0/b_0; \\ m < n \Rightarrow 0. \end{cases}$ *(Золотая теорема - об отношении многочленов);*
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u}{v} = \left[\begin{matrix} [0/0] \\ [\infty/\infty] \end{matrix}\right. = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u'}{v'}$ *(правило Лопиталя).*

- $\int_a^b u(x)\,dx = (b-a)u(c), a < c < b$ *(теорема о среднем);*
- $m(b-a) \le \int_a^b u(x)\,dx \le M(b-a), \quad m = \min u(x); M = \max u(x)$;
- $\int_a^b u(x)\,dx \approx h\left(\dfrac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \dfrac{y_n}{2}\right)$ *(формула трапеций);*
- $\int_a^b u(x)dx = \dfrac{h}{3}\left(y(a) + 4y\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + y(b)\right), h = \dfrac{1}{2}(b-a)$ *(формула Симпсона);*
- $\int_a^\infty u(x)\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b u(x)\,dx$ *(несобственный интеграл).*

Подстановки Эйлера

- $$\begin{cases} \begin{cases} x = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\,\dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a} \cdot t + b}; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \dfrac{\sqrt{a}t^2 + bt - c\sqrt{a}}{2\sqrt{a} \cdot t + b}; \end{cases} \\ dx = 2\dfrac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt. \end{cases} \quad t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x, \ a > 0 ;$$
- $$\begin{cases} \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \dfrac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a - t^2}; \end{cases} \\ dx = 2\dfrac{\sqrt{c}t^2 - bt + a}{(a - t^2)^2}\,dt. \end{cases} \quad t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}, \ c > 0 ;$$
- $$\begin{cases} \begin{cases} x = \dfrac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \dfrac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}; \end{cases} \\ dx = \dfrac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2}\,dt. \end{cases} \quad t = \sqrt{a\frac{x - x_2}{x - x_1}}, \quad (x_1 \neq x_2) \in R .$$

Дифференциальное исчисление

Основные понятия

- $df(x) = f'(x)\,dx$ *(дифференциал функции);*
- $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$ *(дифференциал высшего порядка);*
- $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,\ u = f(x, y, z)$ *(полный дифференциал);*
- $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$ *(малое приращение);*
- $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b + \frac{\partial u}{\partial z}\cos g$ *(производная функции по направлению);*
- $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ *(градиент скалярного поля);*
- $\left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Интегралы

Таблица интегралов

- $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$;
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;
- $\int r^x dx = \frac{r^x}{\ln(r)} + C, \quad 0 < r \neq 1$;
- $\int e^x dx = e^x + C$;
- $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C$;
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$;
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$;
- $\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos x| + C$;
- $\int \operatorname{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin x| + C$;
- $\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \operatorname{cosec}(x)\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$;
- $\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \int \sec(x)\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right)\right| + C$;
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C$;
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C$;
- $\int \frac{1}{x^2 + r^2}dx = \frac{1}{r}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{r}\right) + C, \quad r \neq 0$;
- $\int \frac{1}{x^2 - r^2}dx = \frac{1}{2r}\ln\left|\frac{x - r}{x + r}\right| + C, \quad r \neq 0$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm r^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm r^2}\right| + C$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C, \quad r \neq 0$;